Soft Jar
Mathematical notes
2009

http://www.soft-jar.ucoz.com

SOFT-JAR-2009
Nº0008 2009

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN FRACCIONARIO

TORRES LEDESMA CÉSAR

Resumen. En este trabajo se discute la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial no lineal de orden fraccionario. El operador diferencial fraccionario es definido en el sentido de Riemann-Liouville y las condiciones iniciales son especificadas de acuerdo a la sugerencia de Caputo.
Palabras Claves: ecuaciones diferenciales, orden fraccionario.
Key Words: differential equations, fractional order.

1. Introducción

El cálculo fraccionario es la denominación acuñada para la extensión del cálculo que permite considerar la integración y la derivación de cualquier orden, no necesariamente entero.

El desarrollo del cálculo fraccionario es practicamente tan antiguo como el cálculo usual, con derivadas de orden entero. Sin embargo, también puede ser considerado como una teoría nueva, pues se torno objeto de congresos especificos en los ultimos treinta años.

La primera mención de la posibilidad de extender el sentido de la expresión $\frac{d^n y}{dx^n}$ para el caso de n no entero se encuentra en la correspondencia entre Leibnitz y L'Hôpital ([16], pp. 199), y hasta el siglo XIX fue un asunto que sólo trataron algunos eminentes matemáticos, como Euler, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann o Abel, siendo este último quien por primera vez lo aplicó en Física al solucionar una ecuación integral surgida en la formulación del llamado problema de la Tautócrona ([1], [10]). A partir de entonces, y con especial énfasis en las últimas cuatro décadas, el cálculo fraccionario se ha empleado con éxito en el modelado de fenómenos y

Date: 25 de Agosto del 2008
E-mail address: ctl_576@yahoo.es.

sistemas físicos estudiados en multitud de campos de la ciencia y la ingeniería. Entre ellos se pueden destacar la ciencia de materiales, la teoría del caos y los fractales, la electrónica de dispositivos, la física teoríca, la mecánica, etc. Un amplio espectro de aplicaciones en estos u otros campos se puede encontrar en los textos referenciados por ([2], [8], [11], [13]).

De acuerdo con la concepción de Riemann-Liouville, la noción de integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$, es una consecuencia natural de la fórmula atribuida a Cauchy, que reduce el cálculo de la primitiva correspondiente a la integración de multiplicidad n de una función $f(t)$ a una integración simple de tipo convolución [10], se define la *integral fraccionaria de orden* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ como

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad t > a, \ \alpha \in \mathbb{R}^+, \tag{1.1}$$

donde $\mathbb{R}^+$ es el conjunto de los números reales positivos.

Probablemente, debido a la serie de definiciones no equivalentes para la derivada de orden fraccionario y una interpretación geométrica no evidente, está teoría no a sido utilizada en gran escala. De acuerdo con la definición de Riemann-Liouville, la derivada fraccionaria de una función viene dada por:

(1.2)
$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\right], \quad n-1 < \alpha \leq n, \ n \in \mathbb{Z}^+.$$

Se entiende por ecuación diferencial ordinaria de orden fraccionario α_m, siendo α_m un número real, a toda relación del tipo

$$F(x, y(x), D_a^{\alpha_1} y(x), D_a^{\alpha_2} y(x), ..., D_a^{\alpha_m} y(x)) = g(x) \tag{1.3}$$

donde $F(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ y $g(x)$ son funciones reales dadas y $D_a^{\alpha_m}$ representa una derivada fraccionaria con $\alpha_k > 0$, $k = \widehat{1,m}$. En particular, (1.3) se dirá que es no lineal si tiene la forma

$$D_a^\alpha y(x) = f(x, y(x)) \tag{1.4}$$

y lineal si tiene la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \phi_k(x) D_a^{\alpha_k} y(x) + \phi_0 y(x) = g(x) \tag{1.5}$$

con $\phi_k(x)$ $(0 < k < m)$ y $g(x)$ dadas.

Una característica típica de las ecuaciones diferenciales (clásicas o fraccionarias) es la necesidad de especificar condiciones adicionales para asegurar que la solución es única. En muchas situaciones, estas condicines adicionales describen ciertas propiedades de la solución al início del proceso, es decir en el punto $x = 0$. Por lo que a tal problema se le llama un problema de valor inicial.

Según la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el número de condiciones iniciales que uno necesita especificar, para obtener una única solución de una ecuación diferencial fraccionaria de orden α es $n = \lceil \alpha \rceil$. En particular si $0 < \alpha \leq 1$ (qué es el caso en muchas aplicaciones) solo se necesita especificar una condición. Sin embargo la forma precisa de esta condición no es arbitraria, pues, cuando estamos interesados en el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, surge una conexión intima entre el tipo de condición inicial y el tipo de la derivada fraccionaria. Este es una de las razones por la cual, en este trabajo se toma la derivada fraccionaria de Caputo y no la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, que comunmente se usa en el análisis matemático: Para el caso de Riemann-Liouville, se tendría que especificar el valor de ciertas derivadas (e integrales fraccionarias) de la función desconocida en el punto inicial $x = 0$ (ver [14], §42). Sin embargo, cuando se tiene una aplicación física en concreto, las condiciones iniciales de la función desconocida, tienen un significado físico (por ejemplo la velocidad, etc.), aun cuando no está claro cual es el significado físico de una derivada fraccionaria de y, y también cómo tal cantidad puede ser medido. En otras palabras, los datos requeridos simplemente no estarán disponibles en la práctica.

Con el objeto de evitar este problema, Caputo [4] desarrolla otra definición para la derivada fraccionaria, obtenida a través de la definición de Riemann-Liouville, cambiando el orden de la derivada de orden entero con la integral fraccionaria, es decir

$$D^{\alpha}_{*a} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t)dt, \quad n-1 < \alpha \leq n, \ n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.6}$$

Este cambio, aparentemente sutil, da solución al problema anterior, pues se puede especificar los valores iniciales $y(0)$, $y'(0)$, $\dots y^{(n-1)}(0)$, es decir, el valor de la función y sus derivadas de orden entero ([5], [7]). Estos datos tienen un significado físico y pueden medirse.

Por lo tanto, se incorpora las derivadas clásicas (de orden entero, según Caputo [4]) de la función y, las cuales comunmente son usadas en problemas de valor inicial con ecuaciones de orden entero, en ecuaciones de orden fraccionario se tiene

$$D^{\alpha}_{*} y(x) = f(x, y(x)) \tag{1.7}$$

con condiciones iniciales

$$y^k(0) = b_k, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{1.8}$$

El problema descrito en (1.7) y (1.8), es el que se discutirá en el presente trabajo (existencia y unicidad de su solución).

Puesto que está teoría es nueva y actualmente está en pleno desarrollo, los resultados no serán definitivos, por lo cual agradezco cualquier sugerencia.

2. Preliminares

En está sección, se da en forma resumida las herramientas del análisis matemático y el análisis funcional, que se utilizaran para el desarrollo de este trabajo.

2.1. Teoremas del Punto Fijo.

Teorema 2.1. ***(Teorema del Punto Fijo de Schauder)*** *Sean* E *un espacio de Banach,* U *un subconjunto cerrado y convexo de* E*, y* $\mathbf{A} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *un operador tal que el conjunto* $\{\mathbf{A}u : \ u \in \mathrm{U}\}$ *es relativamente compacto en* E*. Entonces* **A** *tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Ver [9]. □

Teorema 2.2. ***(Arzela-Ascoli)*** *Sea* $\mathrm{F} \subseteq C[a,b]$ $(a < b)$*, equipado con la norma del máximo. Entonces,* F *es relativamente compacto en* $C[a,b]$ *si y solo si* F *es equicontinua (es decir,* $\forall \epsilon > 0$ *existe algún* $\delta > 0$ *tal que para toda* $f \in C[a,b]$ *y todo* $x, x^* \in [a,b]$ *con* $|x - x^*| < \delta$ *se tiene* $|f(x) - f(x^*)| < \epsilon$*) y uniformente acotada (es decir, existe una constante* $K > 0$ *tal que* $\|f\|_\infty \le K, \ \ \forall f \in \mathrm{F}$*).*

Demostración. Ver [9]. □

Teorema 2.3. ***(Weissinger, 1952)*** *Sea* $\mathrm{U} \neq \phi$ *un subconjunto cerrado de un espacio de Banach* X*, y sea* $\alpha_n \ge 0 \ \forall n$ *tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \quad converge \tag{2.1}$$

Además, sea $\mathbf{A} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *un operador que satisface la desigualdad*

$$\|\mathbf{A}^n u - \mathbf{A}^n v\| \le \alpha_n \|u - v\| \tag{2.2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\forall u, v \in \mathrm{U}$*. Entonces,* **A** *tiene un único punto fijo* $u^\bullet$*. Además, para algún* $u_0 \in U$*, la sucesión* $\{\mathbf{A}^n u_0\}_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $u^\bullet$*.*

Demostración. Ver [15]. □

2.2. Ecuaciones Integrales de Volterra. En esta sección se centra la atención en la ecuación de Volterra no lineal, es decir

$$f(x) = g(x) + \int_0^x K(x, s, f(s))ds, \quad 0 \le x \le T \tag{2.3}$$

Para determinar la existencia y unicidad de la solución de está ecuación se debe imponer condiciones sobre el núcleo. Esto se verá en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Supongamos que en (2.3) las funciones* $g(x)$ *y* $K(x,s,u)$ *son continuas en* $0 \le s \le x \le T$ *y* $-\infty < u < \infty$*, y además el núcleo satisface la condición de Lipschitz de la forma*

$$|K(x,s,u) - k(x,s,v)| \le L|u - v| \tag{2.4}$$

donde L *es independiente de* x*,* s*,* u*,* v*. Entonces (2.3) tiene una única solución continua para todo* T *finito.*

Demostración. Ver [15]. □

2.3. Función de Mittag-Leffler.

Definición 2.1. *Para $z \in \mathbb{C}$ la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ es definida por*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \tag{2.5}$$

y la funciíon de Mittag-Leffler generalizada $E_{\alpha,\beta}(z)$ por

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{2.6}$$

En el siguiente teorema, se establece algunas de las propiedades de la función de Mittag-Leffler, las cuales son usadas despues, en el desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario.

Teorema 2.5. *La función de Mittag-Leffler posee las siguiente propiedades:*

1. *Para $|z| < 1$ la función de Mittag-Leffler generalizada satisface*

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z) dt = \frac{1}{z-1}. \tag{2.7}$$

2. *Para $|z| < 1$, la transformada de Laplace de la función Mittag-Leffler $E_\alpha(z^\alpha)$ es dada por*

$$\int_0^\infty e^{-zt} E_\alpha(z^\alpha) dt = \frac{1}{z - z^{1-\alpha}}. \tag{2.8}$$

3. *La función de Mittag-Leffler (2.5) converge para todo $z \in \mathbb{C}$.*
4. *Para valores especiales de α, la función de Mittag-Leffler es dada por:*
   a. $E_0(z) = \frac{1}{1-z}$.
   b. $E_1(z) = e^z$.
   c. $E_2(z^2) = \cosh(z)$.
   d. $E_2(-z^2) = \cos(z)$.

Demostración. Ver [16]. □

3. Cálculo Fraccionario

Definición 3.1. *Sea $f \in L_1[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. La integral*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad a < x < b \tag{3.1}$$

es conocida como la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de la función f.

Propiedades

1. $\lim_{\alpha \longrightarrow 0} I_a^\alpha f(x) = f(x)$, por lo tanto, solo se escribirá $I_a^0 f(x) = f(x)$.
2. **(Ley de los Exponentes).** Sea $\alpha,\ \mu \in \mathbb{R}^+$ y $f \in L_1[a,b]$. Entonces,

$$I_a^\alpha I_a^\mu f(x) = I_a^\mu I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha+\mu} f(x) \tag{3.2}$$

casi para todo $x \in [a, b]$

Definición 3.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α de una función f, es denotado por D_a^α, y es definida por:*

$$D_a^\alpha f(x) = D^m I_a^{m-\alpha} f(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)dt\right] \tag{3.3}$$

donde $a \leq x \leq b$.

Propiedades

1. Si $\alpha = k \geq 1$ donde $k \in \mathbb{Z}$ y $x > a$, entonces $D_a^\alpha f(x) = D^k f(x)$.
2. Sean α, $\mu \geq 0$. Ademas, sean $\phi \in L_1[a, b]$ y $f = I_a^{\alpha+\mu}\phi$. Entonces

$$D_a^\alpha D_a^\mu f = D_a^{\alpha+\mu} f. \tag{3.4}$$

3. Sea $\alpha > 0$ y $x > a$, entonces

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x). \tag{3.5}$$

4. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m = \lceil \alpha \rceil$. Supongase que f es tal que $I_a^{m-\alpha} f \in AC^m[a, b]$. Entonces,

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{m} \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left[D_a^{\alpha-k} f(z)\right]_{z=a}. \tag{3.6}$$

Definición 3.3. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. El operador D_{*a}^α definido por*

$$D_{*a}^\alpha f(x) = I_a^{n-\alpha} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(t)dt \tag{3.7}$$

para $a \leq x \leq b$, es llamado el Operador Diferencial de Caputo de la función f de orden α.

Propiedades

1. Sea $\alpha \geq 0$ y $n = \lceil \alpha \rceil$. Además, supongase que $f \in AC^n[a, b]$. Entonces

$$D_{*a}^\alpha f = D_a^\alpha \left[f - T_{n-1}[f; a]\right] \tag{3.8}$$

casi en todas partes, donde $T_{n-1}[f; a]$ denota el polinomio de taylor de grado $n - 1$ para la función f, centrada en a. Es decir

$$T_{n-1}[f; a](x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{3.9}$$

2. Si f es continua y $\alpha \geq 0$, entonces

$$D_{*a}^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x). \tag{3.10}$$

3. Sea $\alpha \geq 0$, $n = \lceil \alpha \rceil$ y $f \in AC^n[a, b]$. Entonces

$$I_a^\alpha D_{*a}^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k \tag{3.11}$$

4. Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

Definición 4.1. *Sean* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $n = \lceil \alpha \rceil$ *y* $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Entonces*

$$D_*^{\alpha} y(x) = f(x, y(x)) \tag{4.1}$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$y^k(0) = b_k, \quad k = \widehat{0, n-1} \tag{4.2}$$

es llamado el Problema de Valor Inicial del tipo Caputo.

Lema 4.1. *Si la función* f *es continua, entonces el PVI (4.1-4.2) es equivalente a la ecuación integral del tipo Volterra*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt \tag{4.3}$$

donde $n = \lceil \alpha \rceil$. *En otras palabras:* f *es solución de PVI (4.1-4.2) si y solo si es solución de la ecuación integral (4.3).*

Teorema 4.1. *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *y* $n = \lceil \alpha \rceil$. *Ademas, sea* $k > 0$, $h^* > 0$ *y* $b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Definamos*

$$G := [0, h^*] \times [b_0 - k,\, b_0 + k]$$

y sea la función $f : G \to \mathbb{R}$ *continua. Entonces,* $\exists\, h > 0$ *y una función* $y \in C[0, h]$ *que satisface el PVI (4.1-4.2). Si* $\alpha \in (0, 1)$, *entonces* h *tiene la forma*

$$h := \text{mín}\left\{ h^*,\ \left(\frac{k\Gamma(\alpha+1)}{\|f\|_C} \right)^{1/\alpha} \right\}. \tag{4.4}$$

Ademas, si f *satisface la condición de Lipschitz con respecto a la segunda variable, es decir*

$$\mid f(x, y_1) - f(x, y_2) \mid \leq L \mid y_1 - y_2 \mid \tag{4.5}$$

con alguna constante $L > 0$ *independiente de* x, y_1 *y* y_2, *la función* $f \in C[0, h]$ *es única.*

Este resultado es muy similar al resultado obtenido para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Incluso estos son probados en forma similar, es decir la demostración del teorema no se hará directamente, más bien se utilizará la equivalencia que existe entre el PVI (4.1 - 4.2) y la ecuación integral de Volterra (4.3).

Lema 4.2. *Bajo las hipótesis del teorema 4.1, la ecuación de Volterra*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} b_k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t, f(t))dt \tag{4.6}$$

posee una única solución $f \in C[a, h]$.

Referencias

[1] Beach J., *"Fractional Derivatives"*., A Thesis Submitted in partial fulfillment of the requirements of the Master of Arts Degree Of The Graduate School At Rowan University, December 15, 2000.

[2] Bonilla B., Kilbas A. y Trujillo J., *"Cálculo Fraccionario y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias"*. Uned, Madrid, 2003.

[3] Butzer P. and Westphal U., *"An Introduction to the Fractional Calculus", in Applications of Fractional Calculus in Physics,* R. Hilfer (ed.),World Scientific, Singapore, pp. 1-85, 2000.

[4] Caputo M., *"Linear Models of Dissipations Whose Q is Almost Frequensy Independent - II"*, Geophys J. R. Astr. Soc., **13**, 529-539(1967).

[5] Diethelm K., *"Fracctional Differential Equations. Theory and Numerical Treatment"*. 2003, (Preprint).

[6] Diethelm K. and Freed D., *"On the solution of nonlinear fractional-order differential equations used in the modeling of viscoplasticity"*, in "Scientific Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties"(F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds.), pp. 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[7] Diethelm K. and Ford N., *"Analysis of Fractional Differential Equations"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **265**, 229-248(2002).

[8] Kilbas A., Srivastava H. and Trujillo J., *"Theory and Applications of Fracctional Differential Equations"*. North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. Elsevier, Amsterdan, 2006.

[9] Kreyzig E.,*"Introductory Functional Analysis with Applications"*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[10] Méndez A. y Torres C., *"Notas Sobre Cálculo Fraccionario"*, Universidad Nacional de Trujillo, 2007.

[11] Miller K. and Ross B., *"An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations"*. Wiley & Sons, New York., 1993.

[12] Oldham K. and Spanier J., *"The Fractional Calculus"*. Academic Press, New York, 1974.

[13] Podlubny I., *"Fractional Differential Equations"*. Academic Press, San Diego, 1999.

[14] Samko S., Kilbas A. and Marichev O., *"Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications"*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[15] Torres C. *"Exitencia y Unicidad de la Solución de Ecuaciones deiferenciales Odinarias de Orden Fraccionario"*, Tesis para obtar el grado de Licenciado en Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, 2008.

[16] Weilbeer M.*"Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and Their Analytical Backgroud"*. Ph. D. Thesis, Technische Universitat Braunschweig, 2005.